Z Q

Équation fonctionnelle de ζ

L 107
L 235
L 239
L 245

Lemme : Soit $\theta : x \mapsto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x}$ la fonction θ de Jacobi.

θ vérifie l'équation fonctionelle : $\forall x>0,\ \theta(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\theta\left(\frac{1}{x}\right)$

On pose $\tilde{\theta} : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x}$ alors $\forall x>0$, $\tilde{\theta}\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{x}\,\tilde{\theta}(x) + \frac{1}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{2}$

Dém° : L'equation fonctionnelle de θ resulte de la formule de Poisson.

On a $\forall x>0$, $\theta(x) = 2\tilde{\theta}(x) + 1$. Par suite :

$$\tilde{\theta}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}\left(\theta\left(\frac{1}{x}\right) - 1\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x}\,\theta(x) - 1\right) = \sqrt{x}\,\tilde{\theta}(x) + \frac{1}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{2}$$

Th : La fonction ζ définie sur Ω_1 par $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$

se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\{1\}$,

admettant un pôle simple, de résidu 1 en $z=1$,

et vérifie l'équation fonctionnelle :

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \cdot \zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \cdot \zeta(1-s)$$

Démonstration : Soit $s \in \mathbb{C}$ tel que $\sigma = \mathrm{Re}(s) > 1$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

On a : $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_0^\infty t^{\frac{s}{2}-1} e^{-t}\,dt \underset{x=\frac{t}{\pi n^2}}{=} \int_0^\infty (\pi n^2)^{\frac{s}{2}} x^{\frac{s}{2}-1} e^{-\pi n^2 x}\,dx$

donc $\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\frac{1}{n^s} = \int_0^\infty e^{-\pi n^2 x} x^{\frac{s}{2}} \frac{dx}{x}$

En sommant sur $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient :

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^\infty e^{-\pi n^2 x} x^{\frac{s}{2}} \frac{dx}{x}$$

Or $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^\infty \left| e^{-\pi n^2 x} x^{\frac{s}{2}} \cdot \frac{1}{x} \right| dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^\infty e^{-\pi n^2 x} x^{\frac{\sigma}{2}-1}\,dx = \pi^{-\frac{\sigma}{2}}\Gamma\left(\frac{\sigma}{2}\right)\zeta(\sigma) < \infty$

Donc d'après le th de Fubini - Lebesgue :

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 x} x^{\frac{s}{2}-1} dx = \int_0^\infty \tilde{\theta}(x) x^{\frac{s}{2}-1} dx$$

$$= \int_0^1 \tilde{\theta}(x)\, x^{\frac{s}{2}} \frac{dx}{x} + \int_1^\infty \tilde{\theta}(x)\, x^{\frac{s}{2}} \frac{dx}{x}$$

$$\underset{y=\frac{1}{x}}{=} \int_1^\infty \tilde{\theta}\left(\frac{1}{y}\right) y^{-\frac{s}{2}} \frac{dy}{y} + \int_1^\infty \tilde{\theta}(x)\, x^{\frac{s}{2}} \frac{dx}{x}$$

$$= \int_1^\infty \tilde{\theta}(x) \left(x^{\frac{s}{2}} + x^{-\frac{s}{2}+\frac{1}{2}}\right) \frac{dx}{x} + \int_1^\infty \left(\frac{1}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right) x^{-\frac{s}{2}} \frac{dx}{x}$$

$$= \int_1^\infty \tilde{\theta}(x) \left(x^{\frac{s}{2}} + x^{\frac{1-s}{2}}\right) \frac{dx}{x} - \frac{1}{s(1-s)}.$$

Or $\tilde{\theta}(x) = \sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 x} \leqslant \sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n x} = \frac{e^{-\pi x}}{1-e^{-\pi x}} \leqslant \frac{e^{-\pi x}}{1-e^{-\pi}} = o(e^{-x})$

donc $\forall \sigma \in [a,b]$, $\left|x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} + x^{\frac{s}{2}-1}\right| . |\tilde{\theta}(x)| \leqslant \left(x^{-\frac{a}{2}-\frac{1}{2}} + x^{\frac{b}{2}-1}\right) \frac{e^{-\pi x}}{1-e^{-\pi}} \in \mathbb{L}^1(1,\infty)$

D'après le th d'holomorphie sous le signe intégral, cette intégrale à paramètre définit une f° holomorphe sur $\mathbb{C}$

ainsi $\forall s \in \Omega_1$, $\zeta(s) = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \left(\int_1^\infty \tilde{\theta}(x) . \left(x^{\frac{s}{2}} + x^{\frac{1-s}{2}}\right) \frac{dx}{x} - \frac{1}{s(1-s)}\right)$

Par prolongement analytique, cela prolonge ζ en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{0;1\}$.

De plus, par symétrie du membre de droite, on a :

$\forall s \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$, $\pi^{-\frac{s}{2}} . \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) . \zeta(s) = \int_1^\infty \tilde{\theta}(x) . \left(x^{\frac{1-s}{2}} + x^{\frac{s}{2}}\right) \frac{dx}{x} - \frac{1}{(1-s)s}$

$$\pi^{-\frac{s}{2}} . \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) . \zeta(s) = \pi^{\frac{1-s}{2}} . \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) . \zeta(1-s)$$

On sait que 1 est un pole simple de ζ, de résidu 1.

Enfin, $\zeta(s) = \frac{\pi^{\frac{1-s}{2}} . \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) . \zeta(1-s) . \pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \underset{0}{\sim} \frac{\sqrt{\pi} . \sqrt{\pi} . \frac{-1}{s}}{\frac{2}{s}} = -\frac{1}{2}$

Ainsi 0 est une singularité artificielle et $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$.